

〔1〕

I.

問 1

右回しの力のモーメント=左回しの力のモーメントより、

$$Mg \times 4L \cos 60^\circ + pMg \times 4L \sin 60^\circ = N_B \times 6L$$

$$\therefore N_B = \frac{1+\sqrt{3}p}{3}Mg \quad \dots \text{(答)}$$

問 2

鉛直方向の力のつり合いより、

$$N_A + N_B \cos 60^\circ = Mg$$

$$\therefore N_A = Mg - \frac{1+\sqrt{3}p}{6}Mg = \frac{5-\sqrt{3}p}{6}Mg \quad \dots \text{(答)}$$

問 3

摩擦力の大きさ $|F_A| = F_A$ および水平方向の力のつり合いより、

$$F_A + pMg = N_B \sin 60^\circ$$

$$\therefore F_A = \frac{\sqrt{3}+3p}{6}Mg - pMg = \frac{\sqrt{3}-3p}{6}Mg \quad \dots \text{(答)}$$

問 4

$$p=0 \text{ より, } N_A = \frac{5}{6}Mg$$

$$\text{よって, 最大摩擦力の大きさ} = \mu \cdot \frac{5}{6}Mg$$

棒が静止しているためには、

静止しているために必要な摩擦力 F_A の大きさ $|F_A| = F_A$ が

最大摩擦力の大きさ以下であればよいから、

$$\mu \cdot \frac{5}{6}Mg \geq F_A$$

$$\text{これと問 3 } F_A = \frac{\sqrt{3}-3p}{6}Mg \text{ において } p=0 \text{ より, } F_A = \frac{\sqrt{3}}{6}Mg$$

$$\therefore \mu \cdot \frac{5}{6}Mg \geq \frac{\sqrt{3}}{6}Mg$$

$$\therefore \mu \geq \frac{\sqrt{3}}{5} \quad \dots \text{(答)}$$

II.

問 5

$$N_B \geq 0 \text{ を満たせばよいから, } N_B = \frac{1+\sqrt{3}p}{3}Mg \geq 0 \quad \therefore p \geq -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

これと条件 $p < 0$ より,

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} \leq p < 0 \quad \dots \text{(答)}$$

問 6

静止しているために必要な摩擦力は右向き (正の向き) だから $F_A > 0$

よって, 静止しているために必要な摩擦力の大きさ $|F_A| = F_A$

静止しているために必要な摩擦力の大きさ F_A が,

最大摩擦力の大きさ以下であればよいから,

$$\mu N_A \geq F_A$$

これと問 2 より $N_A = \frac{5-\sqrt{3}p}{6}Mg$, 問 3 より $F_A = \frac{\sqrt{3}-3p}{6}Mg$ だから,

$$\mu \cdot \frac{5-\sqrt{3}p}{6}Mg \geq \frac{\sqrt{3}-3p}{6}Mg$$

$$\therefore 5\mu - \sqrt{3}\mu p \geq \sqrt{3} - 3p$$

$$\therefore \sqrt{3}\mu p - 3p - 5\mu + \sqrt{3} \leq 0$$

$$\therefore \mu p - \sqrt{3}p - \frac{5}{\sqrt{3}}\mu + 1 \leq 0$$

$$(1) -\sqrt{3}, (2) -\frac{5}{\sqrt{3}}, (3) 1 \quad \dots \text{(答)}$$

問 7

静止しているために必要な摩擦力は左向き (負の向き) だから $F_A < 0$

よって, 静止しているために必要な摩擦力の大きさ $|F_A| = -F_A$

静止しているために必要な摩擦力の大きさ $-F_A$ が,

最大摩擦力の大きさ以下であればよいから,

$$\mu N_A \geq -F_A$$

これと問 2 より $N_A = \frac{5-\sqrt{3}p}{6}Mg$, 問 3 より $F_A = \frac{\sqrt{3}-3p}{6}Mg$ だから,

$$\mu \cdot \frac{5-\sqrt{3}p}{6}Mg \geq \frac{-\sqrt{3}+3p}{6}Mg \quad \therefore \mu p + \sqrt{3}p - \frac{5}{\sqrt{3}}\mu - 1 \leq 0$$

$$(4) \sqrt{3}, (5) -\frac{5}{\sqrt{3}}, (6) -1 \quad \dots \text{(答)}$$

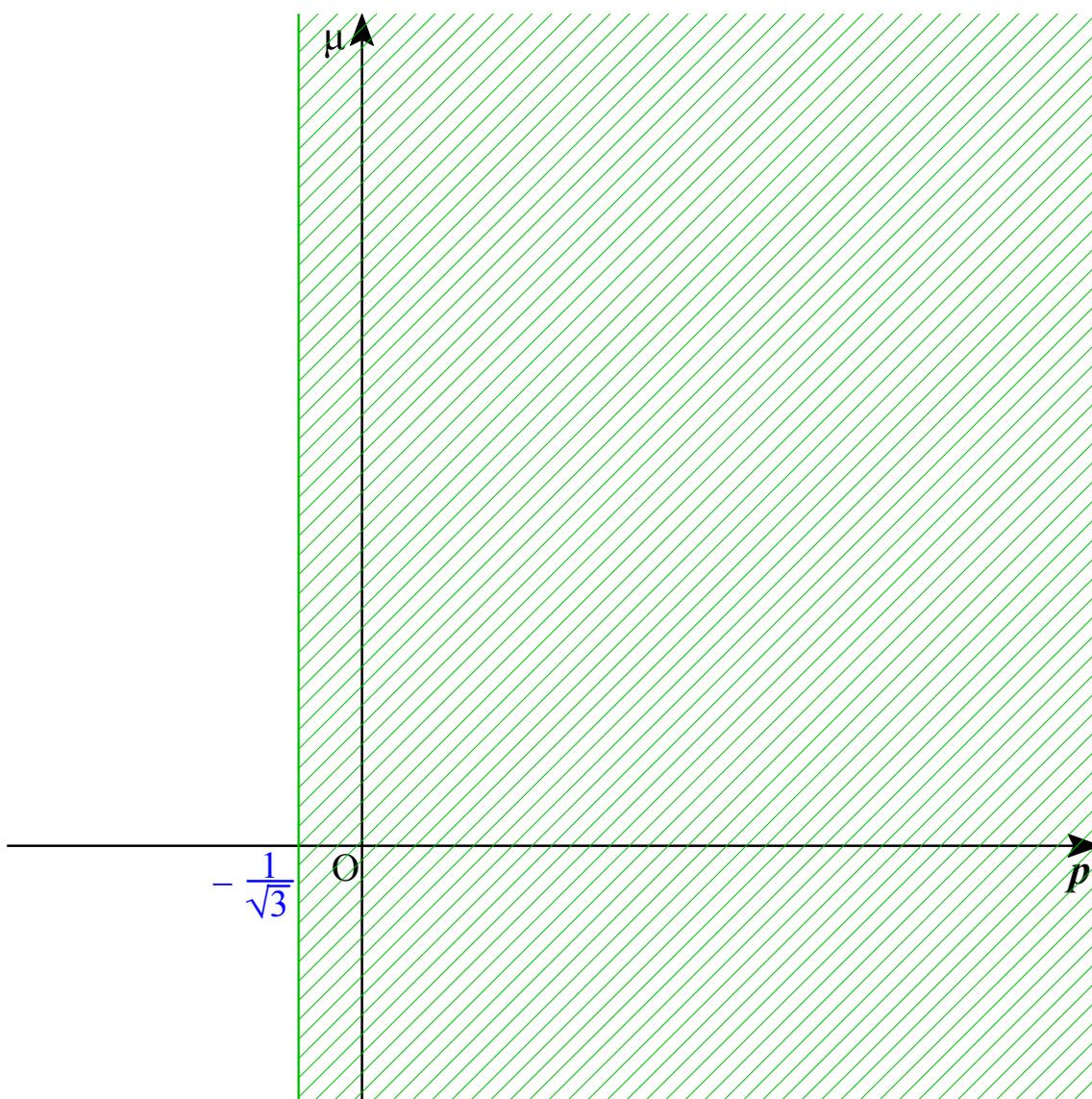
問 8

条件 a を満たすためには, $-\frac{1}{\sqrt{3}} \leq p$

条件 b を満たすためには, 条件 c が満たされていけばよい。

条件 c を満たすためには, $\mu p - \sqrt{3}p - \frac{5}{\sqrt{3}}\mu + 1 \leq 0$ かつ $\mu p + \sqrt{3}p - \frac{5}{\sqrt{3}}\mu - 1 \leq 0$

領域 $-\frac{1}{\sqrt{3}} \leq p$

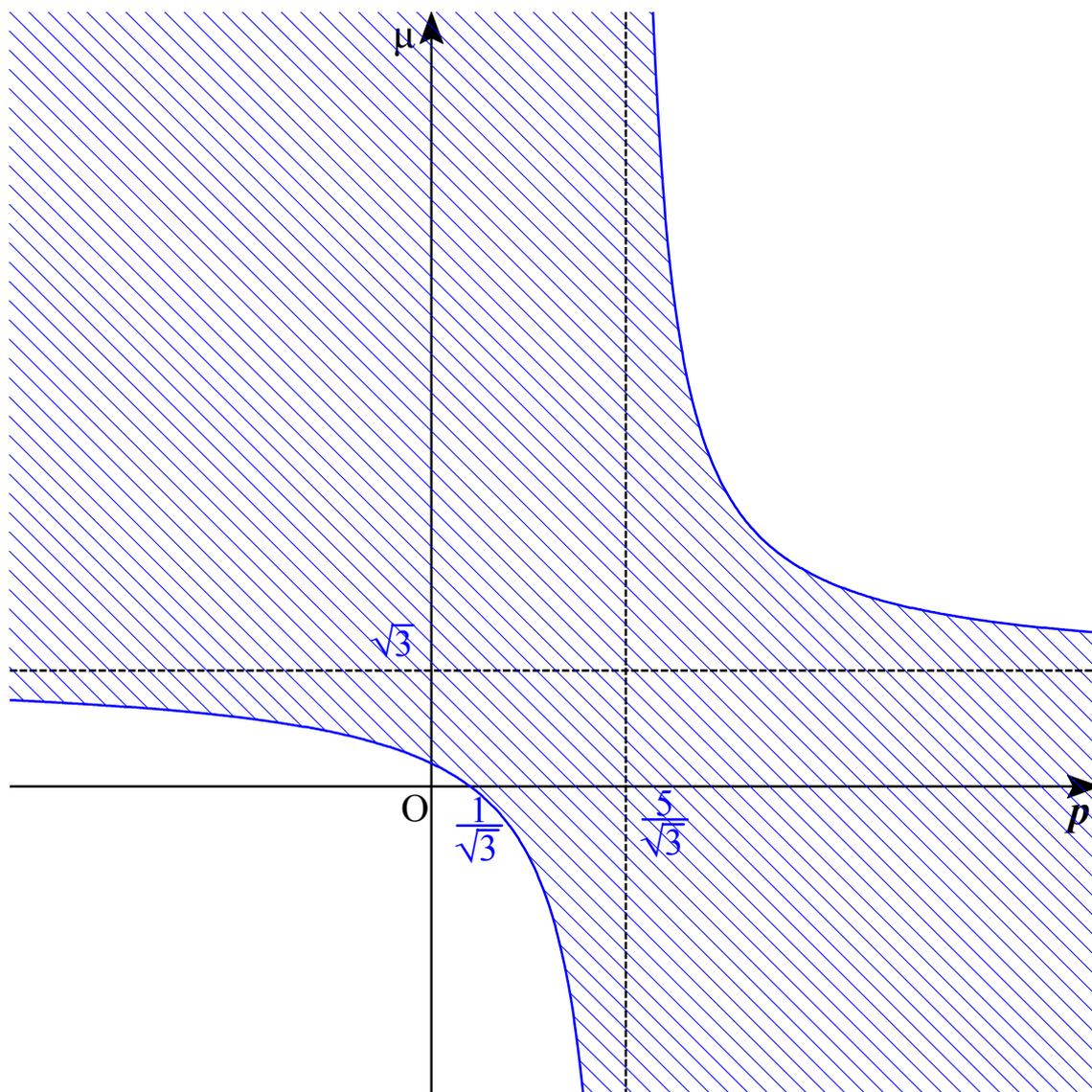


$$\mu p - \sqrt{3}p - \frac{5}{\sqrt{3}}\mu + 1 \leq 0 \text{ より, } \mu \left(p - \frac{5}{\sqrt{3}} \right) \leq \sqrt{3}p - 1$$

よって,

$$\frac{5}{\sqrt{3}} < p \text{ のとき, } \mu \leq \frac{4}{p - \frac{5}{\sqrt{3}}} + \sqrt{3}$$

$$p < \frac{5}{\sqrt{3}} \text{ のとき, } \mu \geq \frac{4}{p - \frac{5}{\sqrt{3}}} + \sqrt{3}$$

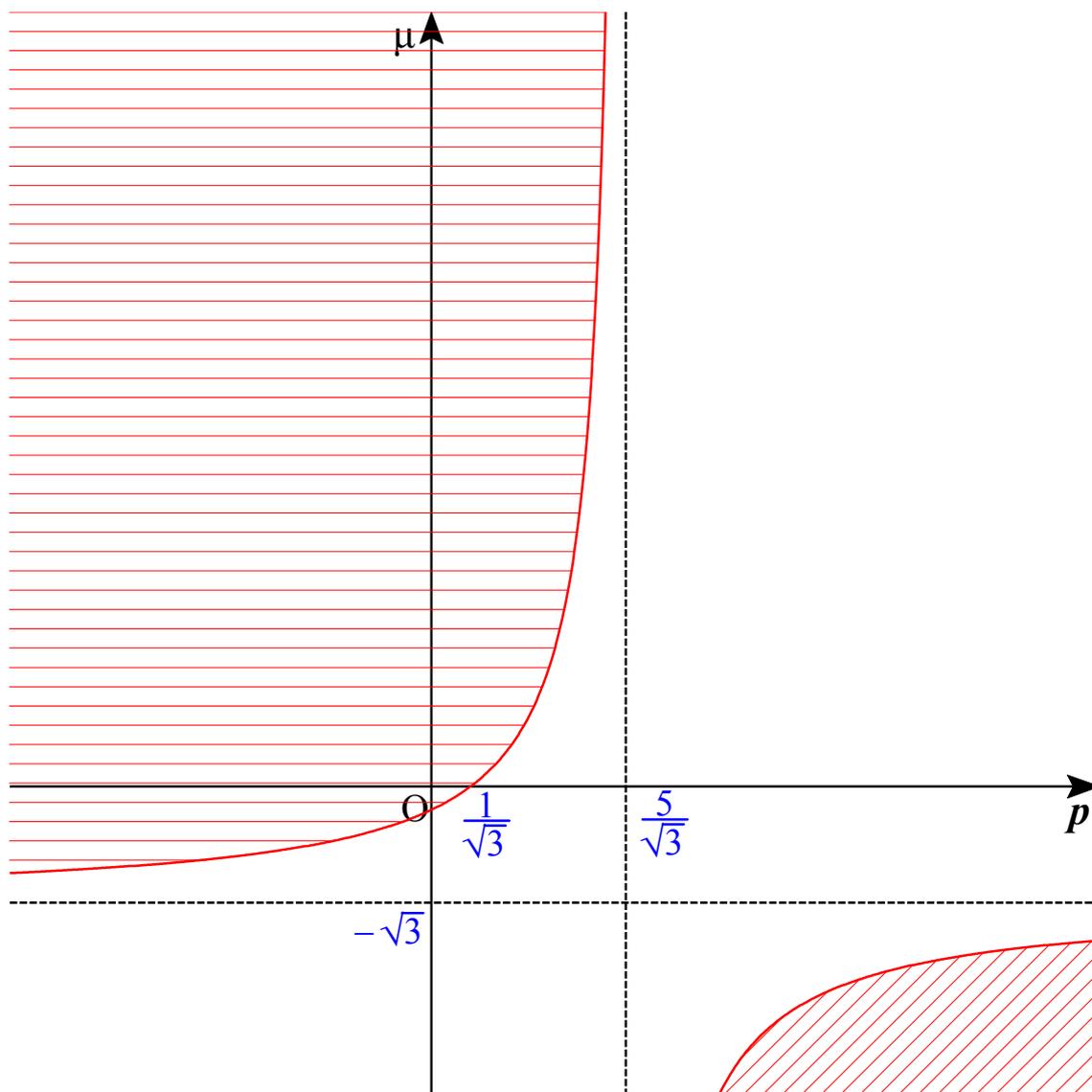


$$\mu p + \sqrt{3} p - \frac{5}{\sqrt{3}} \mu - 1 \leq 0 \text{ より, } \mu \left(p - \frac{5}{\sqrt{3}} \right) \leq -\sqrt{3} p + 1$$

よって,

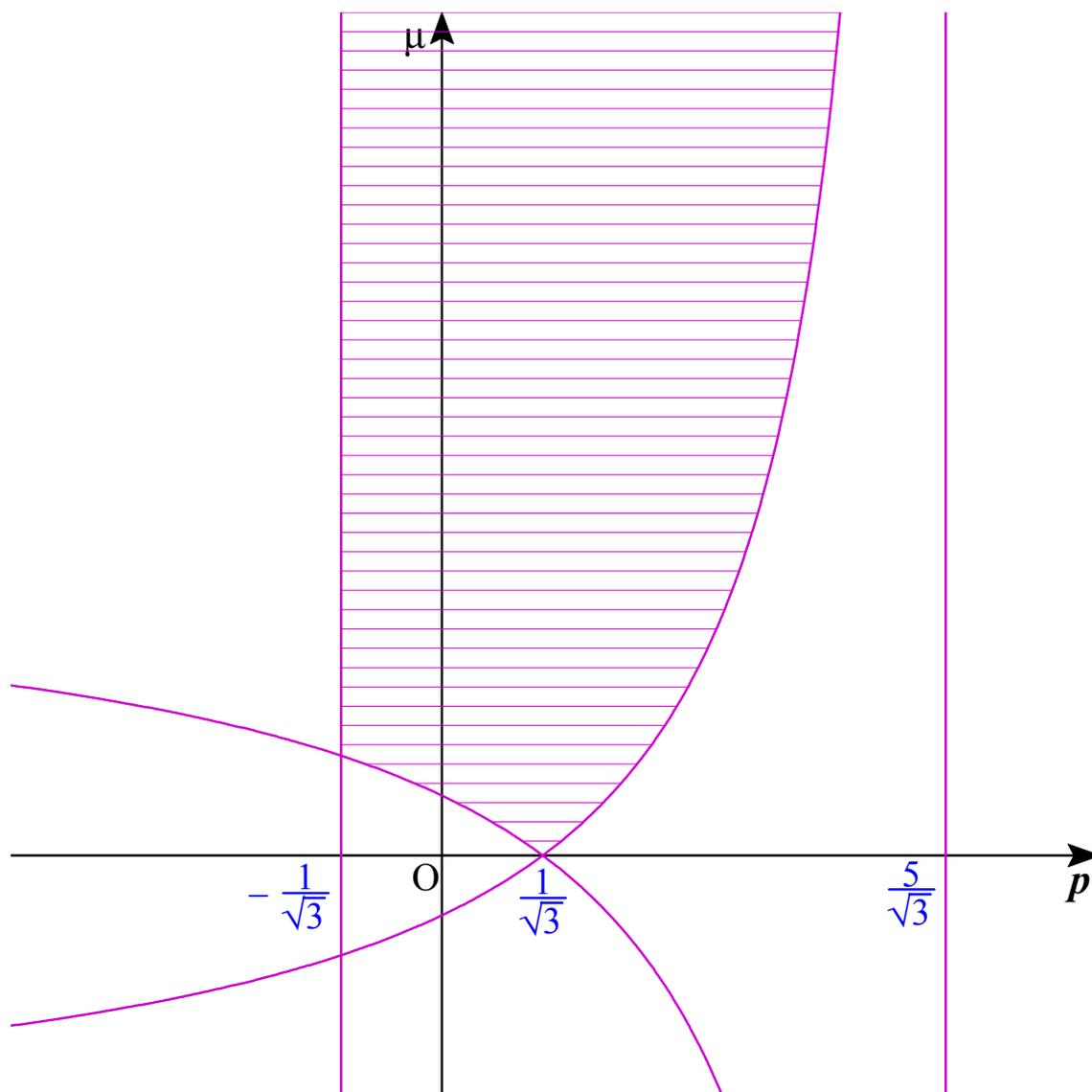
$$\frac{5}{\sqrt{3}} < p \text{ のとき, } \mu \leq \frac{-4}{p - \frac{5}{\sqrt{3}}} - \sqrt{3}$$

$$p < \frac{5}{\sqrt{3}} \text{ のとき, } \mu \geq \frac{-4}{p - \frac{5}{\sqrt{3}}} - \sqrt{3}$$



以上より，条件 a, b, c を満たす領域は，下図のようになる。

また，下図より， $p_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$



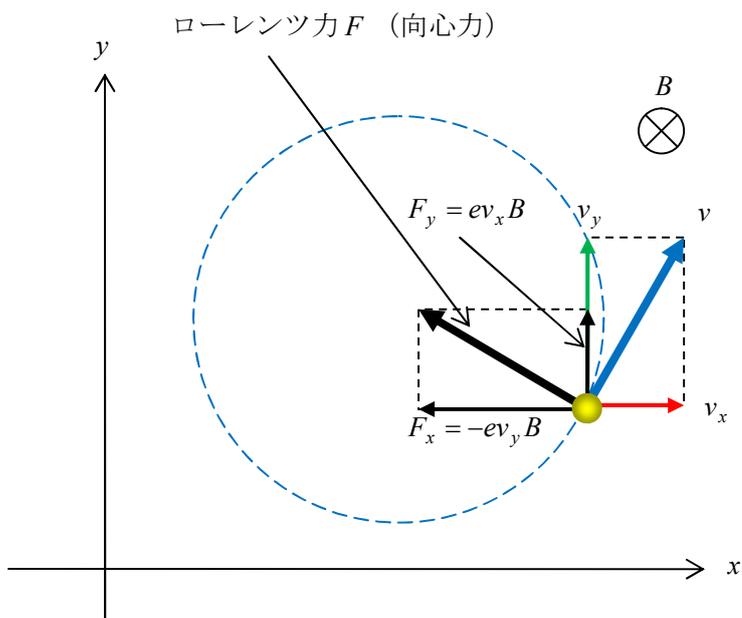
[2]

問 1

質点の電荷 $e > 0$ より，質点が磁場から受けるローレンツ力は下図のようになる。

よって，

$$ma_x = -ev_y B \quad ma_y = ev_x B \quad \dots \text{(答)}$$



問 2

図 1

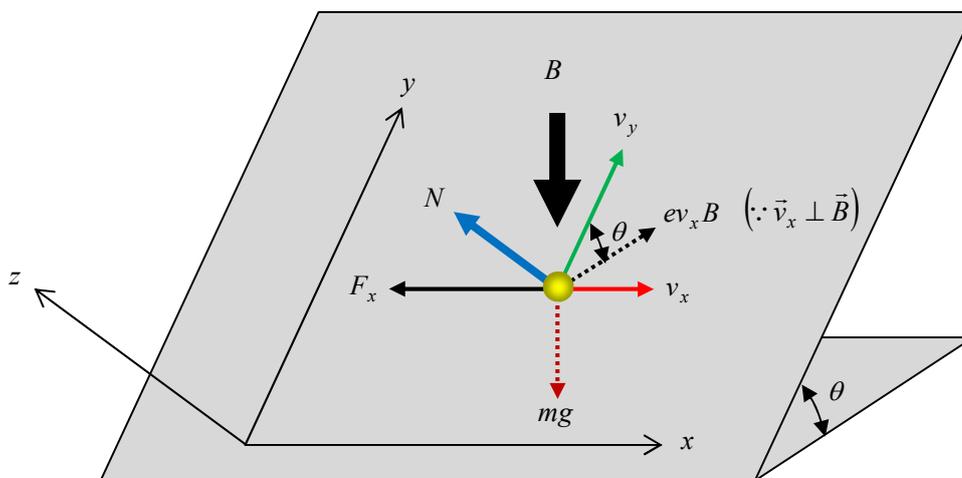


図 2

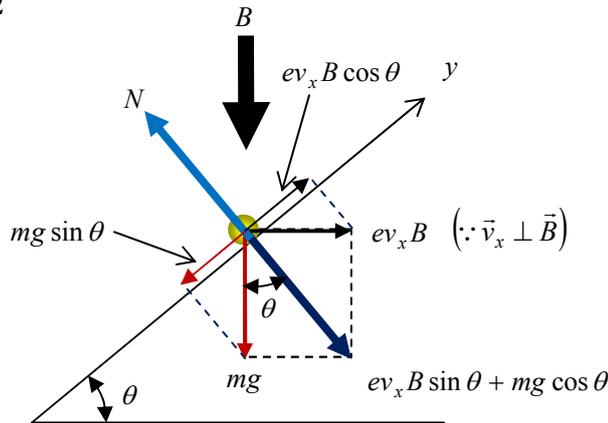


図 2 の斜面に垂直な成分の力のつり合いより、

$$N = ev_x B \sin \theta + mg \cos \theta \quad \dots \text{(答)}$$

問 3

図 1 より、 $\vec{v}_y \cos \theta \perp \vec{B}$

$$\therefore F_x = -ev_y B \cos \theta$$

$$\therefore ma_x = -ev_y B \cos \theta \quad \dots \text{(答)}$$

図 2 の y 軸に平行な成分の外力の和より、 $F_y = ev_x B \cos \theta - mg \sin \theta$

$$\therefore ma_y = ev_x B \cos \theta - mg \sin \theta \quad \dots \text{(答)}$$

問 4

$ma_x = -ev_y \cos \theta$ について、 x 方向の加速度 $a_x = 0$ より、 $0 = -ev_y \cos \theta$

$$\therefore v_y = 0$$

y 軸方向の外力がつり合うから、 $ev_x B \cos \theta = mg \sin \theta$

$$\therefore v_x = \frac{mg \sin \theta}{eB \cos \theta} = \frac{mg}{eB} \tan \theta$$

$$\therefore v_0 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = v_x = \frac{mg}{eB} \tan \theta \quad \dots \text{(答)}$$

問 5

質点の運動は、速度 $\begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ で等速直線運動をする中心の周りの等速円運動だから、

打ち出されたときの質点、つまり最下点にある質点を中心から見たとき、その速度は $v_1 - v_0$ である。

よって、質点が最高点に来た時、中心から見た速度は、 $-(v_1 - v_0)$ となる。

一方、このときの質点の速度を v_x とすると、 $v_x - v_0$ とも表せる。

よって、

$$v_x - v_0 = -(v_1 - v_0) \quad \therefore v_x = 2v_0 - v_1 \quad \dots \text{(答)}$$

解説

地上から見て $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ で運動する質点を速度 $\begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ で運動する観測者から見た速度を $\begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix}$

$$\text{とすると, } \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x - v_0 \\ v_y - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x - v_0 \\ v_y \end{pmatrix} \quad \therefore \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 + w_x \\ w_y \end{pmatrix}$$

これを問 3 の運動方程式に代入すると,

$$ma_x = -ew_y B \cos \theta$$

$$\begin{aligned} ma_y &= e(v_0 + w_x)B \cos \theta - mg \sin \theta \\ &= ew_x B \cos \theta + ev_0 B \cos \theta - mg \sin \theta \end{aligned}$$

図 2 と問 4 より, $v_x = v_0$ のとき $ev_0 B \cos \theta = mg \sin \theta$ だから, $ma_y = ew_x B \cos \theta$

よって,

運動方程式 $ma_x = -ew_y B \cos \theta$, $ma_y = ew_x B \cos \theta$ は,

速度 $\begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ で運動する観測者から見た質点の運動方程式であり,

これと問 1 の等速円運動の運動方程式 $ma_x = -ev_y B$, $ma_y = ev_x B$ を比べると,

$ma_x = -ew_y B \cos \theta$, $ma_y = ew_x B \cos \theta$ で表される運動方程式は,

$B \cos \theta$ の磁場中で質点が速度 $\begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix}$ で等速円運動をすることがわかる。

以上より, この斜面上の質点の運動は,

速度 $\begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ で等速直線運動をする中心に対し速度 $\begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix}$ で等速円運動をすることがわかる。

問 6

原点から打ち出した質点が最初に到達する最も高い位置の x 座標, y 座標

B の斜面に垂直な成分は $B \cos \theta$ だから,

等速円運動の周期 $T = \frac{2\pi m}{eB \cos \theta}$ より,

打ち出されてから最初に最高点に到達するまでの時間 $= \frac{T}{2} = \frac{\pi m}{eB \cos \theta}$

質点が最高点に達したときの x 座標

速度 v_0 で x 方向に等速直線運動をする円運動の中心と一致するから, $x = \frac{\pi m v_0}{eB \cos \theta}$

質点が最高点に達したときの y 座標

打ち出されたときの中心からみた質点の速さ = 質点の等速円運動の速さ = $v_1 - v_0$

よって, 軌道半径を r とすると $2\pi r = (v_1 - v_0) \cdot T$

$$\therefore R = \frac{v_1 - v_0}{2\pi} \cdot \frac{2\pi m}{eB \cos \theta} = \frac{m(v_1 - v_0)}{eB \cos \theta}$$

最高点の座標 $y = 2R$ より, $y = \frac{2m(v_1 - v_0)}{eB \cos \theta}$

以上より,

原点から打ち出した質点が最初に到達する最も高い位置の x 座標, y 座標は,

$$x = \frac{\pi m v_0}{eB \cos \theta}, \quad y = \frac{2m(v_1 - v_0)}{eB \cos \theta}$$

ローレンツ力が質点にした仕事

仕事はカベクトルと質点の変位ベクトルの内積で与えられる。

ローレンツ力のベクトルと質点の速度ベクトルは垂直だから, その内積は 0 である。

よって, ローレンツ力にした仕事は 0 である。

重力が質点にした仕事

重力の向きと質点の鉛直方向の変位の向きのなす角は 180° だから, 重力がした仕事は,

$$mg \cdot 2R \sin \theta \cdot \cos 180^\circ = -2mgR \sin \theta = -2mg \cdot \frac{m(v_1 - v_0)}{eB \cos \theta} \cdot \sin \theta = -\frac{2m^2 g (v_1 - v_0) \tan \theta}{eB}$$

あるいは,

重力がした仕事だけ重力の位置エネルギーが減少するから,

打ち出したときの質点の重力の位置エネルギーを 0 とすると,

$$\frac{1}{2} m v_1^2 + 0 + 0 (\text{ローレンツ力の仕事}) = \frac{1}{2} m (2v_0 - v_1)^2 + (0 - W)$$

$$\therefore W = -2m v_0 (v_1 - v_0)$$

補足

磁束密度の大きさ B の磁場中を等速円運動する電荷 e 、質量 m の質点の軌道半径を R 、

$$\text{速さを } v \text{ とすると, } \frac{mv^2}{R} = evB \text{ より, } R = \frac{mv}{eB} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{等速円運動の周期を } T \text{ とすると, } vT = 2\pi R \text{ より, } T = \frac{2\pi R}{v} \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②より,

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi}{v} \cdot \frac{mv}{eB} = \frac{2\pi m}{eB}$$

[3]

(1)

状態 1 (P_1, Sl, n, T_1) より, $P_1Sl = nRT_1$

$$\therefore n = \frac{P_1Sl}{RT_1} \quad \dots \text{(答)}$$

(2)

連結ピストンを下向きに押す外力

ピストン A に作用する大気圧による大きさ P_0S の外力

ピストン B に作用する大気圧による大きさ P_0S の外力

連結ピストンを上向き押す外力

ピストン A に作用するシリンダー内の気体の圧力による大きさ P_1S の外力

ピストン B に作用する液体の圧力による大きさ P_0S の外力

\therefore 静止中の液面では, 液体の圧力と大気圧 P_0 が釣り合っている。

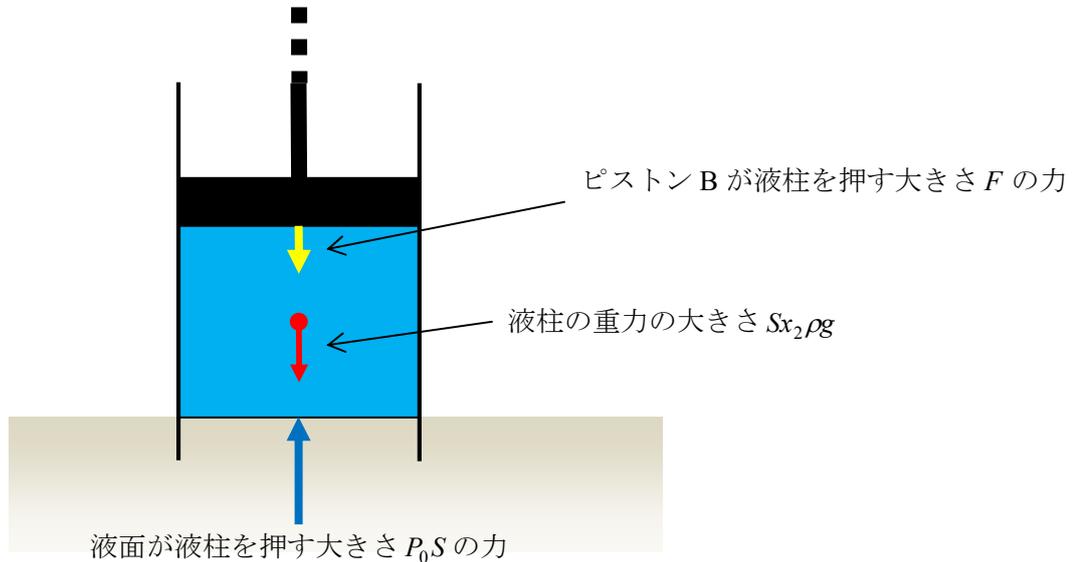
ピストンに作用する上下方向の外力の大きさの釣り合いより,

$$P_0S + P_0S = P_1S + P_0S$$

$$\therefore P_1 = P_0 \quad \dots \text{(答)}$$

(3)

水槽の液面より高い液体部分を液柱という物体と見なし,
液柱に作用する上下方向の外力の釣り合いを考える。



$$\text{図より, } F + Sx_2\rho g = P_0S \quad \therefore F = (P_0 - x_2\rho g) \cdot S$$

F の反作用の力は液柱がピストンを押す力だから, その圧力の大きさを P_B とすると,

$$P_B S = (P_0 - x_2\rho g) S$$

$$\therefore P_B = P_0 - x_2\rho g \quad \dots \text{(答)}$$

(4)

連結ピストンを下向きに押す外力

ピストン A に作用する大気圧による大きさ P_0S の外力ピストン B に作用する大気圧による大きさ P_0S の外力

連結ピストンを上向き押す外力

ピストン A に作用するシリンダー内の気体の圧力による大きさ P_2S の外力ピストン B に作用する液体の圧力による大きさ $(P_0 - x_2\rho g) \cdot S$ の外力

ピストンに作用する上下方向の外力の大きさのつり合いより、

$$P_0S + P_0S = P_2S + (P_0 - x_2\rho g) \cdot S$$

$$\therefore P_2 = P_0 + x_2\rho g \quad \dots (答)$$

(5)

状態 I (P_1, Sl, n, T_1), 状態 II ($P_2, S(l + x_2), n, T_2$) より, $\frac{P_1Sl}{nT_1} = \frac{P_2S(l + x_2)}{nT_2}$

$$\therefore \frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2(l + x_2)}{P_1l}$$

(2), (4) より, $P_1 = P_0$, $P_2 = P_0 + x_2\rho g$

$$\therefore \frac{T_2}{T_1} = \frac{(P_0 + x_2\rho g)(l + x_2)}{P_0l} \quad \dots (答)$$

(6)

内部エネルギー変化 $\Delta U = nC_v\Delta T$ において、単原子分子の定積モル比熱 $C_v = \frac{3}{2}R$ より、

$$\Delta U = \frac{3}{2}nR(T_2 - T_1) \quad \dots (答)$$

(7)

 $x = x_3$ のとき, (3)の解説の P_B の大きさが 0 になるから, $P_0 - x_3\rho g = 0$

$$\therefore x_3 = \frac{P_0}{\rho g}$$

このことはピストンの上昇距離 x が, $x > x_3$ になると、

ピストン B と液柱が離れることを意味している。

またこのことは、たとえいくら高性能の真空ポンプを使っても、

引き上げることができる液面の高さに上限があるということも意味している。

植物では、セコイアのように高さ 100m におよぶ高木が存在するが、

これは植物は水を、葉からの水の蒸散と水の凝集力を利用して、地中から引き上げているからである。

トリチェリの真空

トリチェリが 1643 年に大気圧の作用を調べる目的で、一端を閉じた長さ約 1m のガラス管に水銀を満たし、開いた端を水銀入りの容器に沈めて立てたところ、管内の水銀柱が約 760mm の高さになった。ガラス管の上部の空所の希薄な水銀蒸気を見れば真空とみなせる。これを「トリチェリの真空」という。

(8)

連結ピストンの質量を無視するから、気体が行う仕事は、ピストン A を通して大気を押し上げる仕事とピストン B を通して液体にする仕事と大気を押し上げる仕事の和となる。

ピストン A を通して大気を押し上げる仕事は $P_0 Sx_3$ ……①

ピストン B を通して液体にする仕事と大気を押し上げる仕事の和は、液体の重力の位置エネルギーの増加となって現れる。

液柱の重力 = $Sx_3 \rho g$

水槽の液面を基準にした液柱の重心の位置の高さ = $\frac{x_3}{2}$ より、

液柱の重力による位置エネルギー = $Sx_3 \rho g \cdot \frac{x_3}{2} = \frac{Sx_3^2 \rho g}{2}$

あるいは、

液柱の高さが x のときの液柱の重力の大きさは $S\rho gx$ だから、 x に比例することがわかる。

したがって、その重力の大きさを弾性力の大きさと見なせる。

よって、液柱の位置 x_3 における弾性エネルギー = $\frac{1}{2} \rho S g x_3^2$

状態 I では液柱が存在しないから、

液体の重力による位置エネルギーの増加 = $\frac{Sx_3^2 \rho g}{2} - 0 = \frac{Sx_3^2 \rho g}{2}$ ……②

①, ②より、

$W = \frac{Sx_3^2 \rho g}{2} + P_0 Sx_3$ ……(答)

補足

ピストン B を通して液体にする仕事と大気を押し上げる仕事の和の微小部分を dw とすると、

ピストン B が大気を押し上げる微小の仕事 $= P_0 S dx$

ピストン B を通して液体にする微小の仕事 $=$ 液体がピストン B にされる微小の仕事

$$= -1 \times \text{液体がピストン B にする微小の仕事}$$

$$= -P_B S dx$$

より、 $dw = -P_B S dx + P_0 S dx = -(P_0 - x \rho g) S dx + P_0 S dx = S x \rho g dx$

$$\therefore \int_0^{x_3} dw = \int_0^{x_3} S x \rho g dx$$

$$= \left[\frac{S x^2 \rho g}{2} \right]_0^{x_3}$$

$$= \frac{S x_3^2 \rho g}{2} = \text{液体の重力による位置エネルギーの増加}$$

(9)

$$W = \frac{3P_0^2 S}{2\rho g}$$

(10)

気体に与えられた熱 $Q =$ 内部エネルギーの増加 $\Delta U +$ 気体をした仕事 W

より

$$Q = \Delta U + W$$

$$= (U_3 - U_1) + \frac{3P_0^2 S}{2\rho g}$$

$$= \left(\frac{3}{2} nRT_3 - \frac{3}{2} nRT_1 \right) + \frac{3P_0^2 S}{2\rho g}$$

$$= \frac{3}{2} (nRT_3 - nRT_1) + \frac{3P_0^2 S}{2\rho g}$$

ここで、理想気体の状態方程式、 $P_1 = P_0$ 、 $x_3 = \frac{P_0}{\rho g}$ より、

$$nRT_3 = (P_0 + x_3 \rho g) S (l + x_3) = \left(P_0 + \frac{P_0}{\rho g} \cdot \rho g \right) S \left(l + \frac{P_0}{\rho g} \right) = 2P_0 S \left(l + \frac{P_0}{\rho g} \right)$$

$$nRT_1 = P_1 S l = P_0 S l \quad \therefore nRT_3 - nRT_1 = P_0 S l + \frac{2P_0^2 S}{\rho g}$$

よって、

$$Q = \frac{3}{2} \left(P_0 S l + \frac{2P_0^2 S}{\rho g} \right) + \frac{3P_0^2 S}{2\rho g} = \frac{3}{2} P_0 S l + \frac{9P_0^2 S}{2\rho g} \quad \dots \text{(答)}$$

(11)

$0 \leq x \leq x_3$ のとき

ピストン B の下面に作用する圧力 (P_B とする)

(3)より, $P_B = P_0 - x\rho g$

シリンダー A 内の気体の圧力 (P_A とする)

(4)より, $P_A = P_0 + x\rho g$

$x_3 \leq x$ のとき

ピストン B の下面に作用する圧力

液柱とピストン B が離れるから, $P_B = 0$

シリンダー A 内の気体の圧力

$P_B = P_0 - x_3\rho g = 0$ より, $x_3\rho g = P_0$

$\therefore P_A = P_0 + x_3\rho g = 2P_0$

